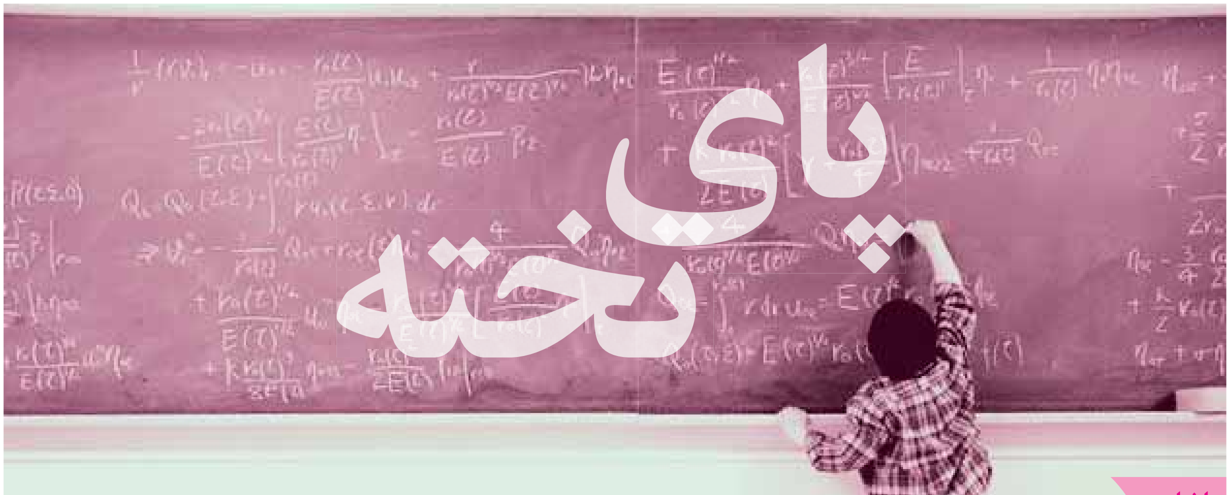
دکتر محرم نژاد ایردموسی



اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماه‌نامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی مسئله‌ها و راه‌حل‌ها تشکیل شده است. در هر شمارهٔ از ماه‌نامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماه‌نامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم که مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی‌که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماه‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

نکتهٔ آخر اینکه در چند شمارهٔ اول، سهم مسئله‌ها بیشتر است و با دریافت پاسخ‌های شما، بخش راه‌حل‌ها به‌تدریج پربارتر خواهد شد.

منتظر راه‌حل‌های ارسالی شما هستیم.

بخش اول: مسئله‌ها

۱۴۱. برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+1}]=[\sqrt{4n+2}]=[\sqrt{4n+3}]$$

۱۴۲. عبارت‌های زیر را تجزیه کنید:

$A=(x+y)^5-(x^5+y^5)$

$B=(x+y)^7-(x^7+y^7)$

۱۴۳. x، y و z ســه عدد حقیقی هســتند و $x\neq y$ است، به‌طوری‌که داریم: $x^2(y+z)=y^2(x+z)=2$. مطلوب است مقدار عددی $z^2(x+y)$.

۱۴۴. اگر $\{a_n\}$ یک دنبالهٔ حسابی باشد، بررسی کنید که کدام‌یک از دنباله‌های زیر حسابی است:

(الف) $b_n=a_{n+1}^2-a_n^2$

(ب) $c_n=aa_n+b$

(ج) $d_n=a_n^2$

۱۴۵. ثابت کنید دنبالهٔ $\{a_n\}$ یک دنبالهٔ حســابی است، اگر و تنها اگر اعداد حقیقی A و B موجود باشند؛ به‌طوری‌که: $S_n=a_1+a_2+...+a_n=An^2+Bn$.

۱۴۶. اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای حسابی با جملات مثبت باشد، ثابت کنید:

$$\sqrt{a_1a_n}\leq\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}\leq\frac{a_1+a_n}{2}$$

۱۴۷. فرض کنید S_n مجموع همهٔ اعداد طبیعی بین 2^n و 2^{n+1} باشد. ثابت کنید S_n مضرب ۳ است.

۱۴۸. خانه‌هــای جدول زیــر را با اعداد طبیعی پر کنید که اعداد هر ســطر و اعداد هر ســتون یک تصاعد حسابی باشند.

	۷۴			
				۱۸۶
		۱۰۳		
۰				

۱۴۹. تصاعد هندسی $\{a_n\}$ را بیابید، به‌طوری که برای هر $n\geq 1$ داشته باشیم: $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.

۱۵۰. برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ثابت کنید:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}<\frac{3}{4}$$

■ بخش دوم: راه‌حل‌ها

۹۱. (فرستنده: عطا طهوری، دانش‌آموز دبیرستان علامه طباطبایی تبریز)

اگر داشته باشیم: $\log_6^{15}=a$ و $\log_{12}^{18}=b$، حاصل $\log_{25}^{24}$ را برحسب a و b به‌دست آورید.

$$\log_{25}^{24}=\log_{25}^{144}-\log_{25}^{6}=\log_5^{12}-\frac{1}{\log_6^{25}}=\frac{2\log_6^{12}-1}{2\log_6^{5}}\quad(1)$$

$$\log_{12}^{18}=\frac{\log_3^2+2}{2\log_3^2+1}\Rightarrow\log_3^2=\frac{b-2}{1-2b}\Rightarrow\log_6^2=\frac{b-2}{-b-1}$$

$$\Rightarrow\log_6^{12}=\frac{3}{b+1}\quad(2)$$

$$\log_6^{15}=\log_6^3+\log_6^5\Rightarrow\log_6^5=a-\log_6^3=a-\log_2^3\times\log_6^2$$

$$=a-\frac{1-2b}{-b-1}\Rightarrow\log_6^5=\frac{a+1+ab-2b}{b+1}\quad(3)$$

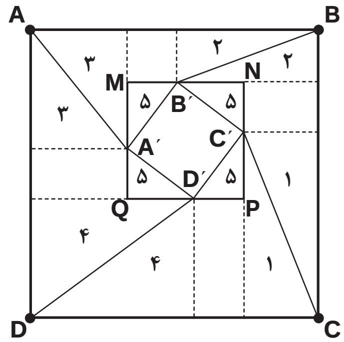
از روابط (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$\log_{25}^{24}=\frac{7-b}{2a+2+2ab-4b}$$

۹۲. (فرستنده: نفیسه آغویی، دانش‌آموز دبیرستان فرزانگان چهاردانگه)

مربعی را داخل مربع دیگری انداخته‌ایم. ثابت کنید اگر رئوس متناظر این دو مربع را به‌هم وصل کنیم، از چهار ناحیهٔ حاصل، مجموع مساحت دو ناحیه‌ای که مجاور به دو ضلع روبه‌روی مربع هستند، با مجموع مساحت دو ناحیهٔ دیگر برابر است.

از رئوس مربع کوچک‌تر خطوطی به موازات اضلاع مربع بزرگ‌تر رسم می‌کنیم تا مربع MNPQ ایجاد شود. در شکل، مثلث‌های هم‌مساحت با شمارهٔ یکسان، شماره‌گذاری شده‌اند که اثبات آن را به خواننده واگذار می‌کنیم. همچنین، مجموع مساحت‌های دو مستطیل مجاور به دو ضلع AD و BC برابر است با: A´Q(DC-MN) (چون A´Q=C´N) و مجموع مساحت‌های دو مستطیل مجاور به دو ضلع AB و CD برابر است با: B´M(AD-MQ). از طرف دیگر: A´Q=B´M. در نتیجه حکم ثابت می‌شود.



۹۳. (فرستنده: نفیسه آغویی، دانش‌آموز دبیرستان فرزانگان چهاردانگه)

با فرض $f(x)=x-\frac{1}{x}$، معادلهٔ $f(f(x))=0$ چند ریشه در مجموعه اعداد حقیقی دارد؟

معادلهٔ $x-\frac{1}{x}=k$ به ازای هر k همواره دو ریشه دارد، چون:

$$x-\frac{1}{x}=k\Rightarrow x^2-kx-1=0\Rightarrow\Delta=k^2+4>0$$

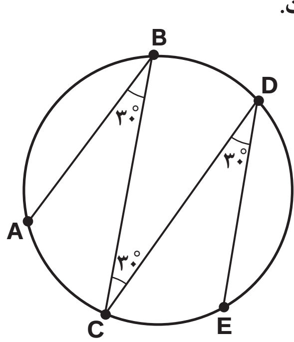
اکنون معادلهٔ $f(f(x))=1$ را در نظر بگیرید.

$$f(f(x))=1\Rightarrow f(x)-\frac{1}{f(x)}=1$$

در نتیجه دو مقدار مانند a و b برای f(x) به‌دست می‌آید. بنابراین با فرض f(x)=a دو ریشه و با فرض f(x)=b دو ریشهٔ دیگر خواهیم داشت. در نتیجه چهار ریشه برای معادلهٔ $f(f(x))=1$ به‌دست می‌آید. چهار ریشهٔ به‌دست آمده متمایز هستند. کافی است جمع و ضرب ریشه‌ها در معادلهٔ $x^2-kx-1=0$ را در نظر بگیرید.

۹۴. (فرستنده: محمد طبیعی، دانش‌آموز دبیرستان علامه طباطبایی تهران)

مطابق شکل زاویه‌های بین هر دو وتر متوالی برابر است با ۳۰ درجه. ثابت کنید اگر $AB^2+CD^2=BC^2+DE^2$، آن‌گاه کمان AB، ۹۰ درجه است.



بنابر قضیه کسینوس‌ها داریم:
$AB^۲+BE^۲-AB.BE=AE^۲$ چون: $BE=CD$،
پس: $AB^۲+CD^۲-AB.CD=AE^۲$.
همچنین: $AD^۲+DE^۲-AD.DE=AE^۲$ که با توجه به $AD=BC$ داریم: $BC^۲+DE^۲-BC.DE=AE^۲$.

پس:

$AB^۲+CD^۲-AB.CD=BC^۲+DE^۲-BC.DE$.

از طرف دیگر داریم: $BC^۲+DE^۲=AB^۲+CD^۲$. در نتیجه: $AB.CD=BC.DE$ و یا: $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{CD}$. چون: $\angle ABC=\angle CDE=۳۰$، پس دو مثلث ABC و CDE متشابه‌اند و در نتیجه: $\angle ACB=\angle DCE$. حال از آنجا که: $۲(\hat{ACB}+\hat{DCE}+۳۰+۳۰+۳۰)=۳۶۰$، خواهیم داشت: $\hat{ACB}=۴۵^\circ$ که نشان می‌دهد: $\widehat{AB}=۹۰$.

۹۵. (فرستنده: محمد طبیعی، دانش‌آموز دبیرستان علامه طباطبایی تهران)

مربع ABCD مفروض است. دایرهٔ S را به مرکز B و به شعاع AB، و نیم‌دایرهٔ L را به قطر AB و داخل مربع رسم می‌کنیم. روی نیم‌دایرهٔ L نقطهٔ M را در نظر بگیرید و BM را رسم کنید تا دایرهٔ S را در T قطع کند. ثابت کنید: $\angle DAT=\angle TAM$.

فرض کنید: $\angle BAM=a$ و $\angle TAM=b$. چون AB قطر نیم‌دایرهٔ L است، پس: $\hat{BMA}=\hat{AMT}=۹۰$ و: $\hat{ATM}=۹۰-b$. از طرف دیگر، چون: $AB=BT$، مثلث ABT متساوی‌الساقین است و: $\hat{BAT}=\hat{BTA}$. در نتیجه: $a+b=۹۰-b$ و بنابراین: $۲b+a=۹۰^\circ$. همچنین چون: $\hat{DAB}=۹۰$، پس: $\hat{DAT}+b+a=۹۰$ و طبق تساوی مذکور داریم: $\hat{DAT}+a+b=۲b+a$ که نتیجه می‌دهد: $\hat{DAT}=b$ و حکم نتیجه می‌شود.

۹۶. در معادلهٔ $۵(x^۲+y^۲+z^۲)=۱۲۵۰-۲xyz$، همهٔ متغیرها اعدادی اول هستند. معادله را حل کنید.

ابتدا نتیجه بگیرید که $۲xyz$ مضرب ۵ است و چون x، y و z اول هستند، پس یکی از آن‌ها باید برابر ۵ باشد. (چرا؟) بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم: $x=۵$. با جای‌گذاری و ساده کردن معادله، به تساوی $y^۲+z^۲=۲۲۵-۲yz$ می‌رسیم. در نتیجه: $(y+z)^۲=۲۲۵$ و یا: $y+z=۱۵$. با توجه به اول بودن y و z تنها جواب ممکن مقادیر ۲ و ۱۳ هستند.

۹۷. در یک ساعت دیجیتالی که ساعت را با h، دقیقه را با m و ثانیه را با s نمایش می‌دهد، در چند زمان متفاوت $h+m=s$ اتفاق می‌افتد؟ ($۰\le h\le ۲۳$، $۰\le m\le ۵۹$، $۰\le s\le ۵۹$)

بـه ازای هر مقدار h، m می‌تواند در بازهٔ $۰\le m\le ۵۹-h$ تغییر کند. پس $۶۰-h$ مقدارهای متفاوت برای m (و در نتیجه برای s) ایجاد می‌شود که تعداد کل حالت‌های ممکن برابر است با: $\sum_{h=۰}^{۲۳}(۶۰-h)$. این مقدار پس از ساده کردن برابر است با: ۱۱۶۴.

۹۸. بزرگ‌ترین مقدار λ را طوری پیدا کنید که نامساوی زیر به ازای همهٔ مقادیر حقیقی a، b، c و d برقرار باشد:

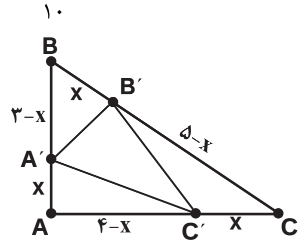
$a^۲+b^۲+c^۲+d^۲\ge ab+\lambda bc+cd$

با فرض $a=d=۰$ و $b=c$ داریم: $۲b^۲\ge\lambda b^۲$. در نتیجه: $\lambda\le ۲$. ثابت می‌کنیم با فرض $\lambda=۲$ نامساوی به ازای همهٔ مقادیر حقیقی a، b، c و d برقرار است.

$$a^۲+b^۲+c^۲+d^۲\ge ۲\sqrt{(a^۲+c^۲)(b^۲+d^۲)}$$
$$\ge|ab+cd|+\sqrt{(a^۲+c^۲)(b^۲+d^۲)}$$
$$\ge ab+cd+\sqrt{c^۲b^۲}\ge ab+cd+bc$$

۹۹. سه مورچه روی رئوس مثلث ABC هستند و طول اضلاع AB، BC و CA به ترتیب برابر است با ۳، ۵ و ۴. اگر سه مورچه با سرعت یک واحد در ثانیه و در جهت $A\to B\to C\to A$ حرکت کنند، در چه لحظه‌ای از ۳ ثانیهٔ اول، مساحت مثلثی که سه رأس آن توسط مورچه‌ها مشخص می‌شود، مینی‌مم است؟

$$S(A'B'C')=\frac{۱}{۲}\times۳\times۴-\frac{۱}{۲}(x.(۴-x)$$
$$+x.(۳-x).\sin B+x(۵-x)\sin C)$$
$$=۶-\frac{۱}{۲}(۴x-x^۲+\frac{۱۲}{۵}x-\frac{۴}{۵}x^۲+۳x-\frac{۳}{۵}x^۲)$$
$$=\frac{۶}{۵}x^۲-\frac{۴۷}{۱۰}x+۶$$



در نتیجــه در رأس ســهمی $y=\frac{۶}{۵}x^{۲}-\frac{۴۷}{۱۰}x+۶$ مساحت مثلث مینی‌مم خواهد شد، یعنی در لحظهٔ

$$t=\frac{\frac{۴۷}{۱۰}}{۲\times\frac{۶}{۵}}=\frac{۴۷}{۲۴}\text{،}$$

۱۰۰. مجموعهٔ $S=\{۱,۲,...,۲۰۱۳\}$ مفروض است. چند سه‌تایی از زیرمجموعه‌های S مانند (A,B,C) می‌توان ساخت به‌طوری که: $A\cup B\cup C=S$ و $B\subseteq A\cup C$؟

برای هر عضو a از S، شش حالت وجود دارد، چرا که از $۲^{۳}$ حالت ممکن، دو حالت زیر قابل قبول نیست.

۱. a عضو هیچ‌کدام از سه مجموعهٔ A، B و C نباشد.

۲. a عضو B باشد، اما عضو A و C نباشد. در نتیجه طبق اصل ضرب، کل حالت‌های ممکن برای تمام اعضای S برابر است با: $N=۶^{۲۰۱۳}$.

۱۰۱. اعداد سه رقمی $\overline{ab۴}$ و $\overline{۴ab}$ در تساوی زیر صدق می‌کنند. عدد دو رقمی $\overline{ab}$ را بیابید.

$$۴۰۰-\overline{ab۴}=\overline{۴ab}-۴۰۰$$

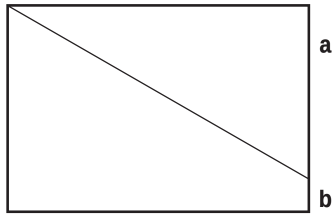
$$۴۰۰-۱۰۰a-۱۰b-۴=۴۰۰+۱۰a+b-۴۰۰$$

$$\Rightarrow ۱۰a+b=۳۶\Rightarrow \overline{ab}=۳۶$$

۱۰۲. عــدد ۲۰۱۳ دارای ایــن خاصیت اســت که ارقام آن چهار رقم متوالی هستند. قبل از سال ۲۰۱۳، نزدیک‌ترین سالی که این خاصیت را داشته، چه سالی بوده است؟

اگر صفر جزو رقم‌ها باشــد، به اعداد ۲۰۱۳، ۲۰۳۱، ۲۱۰۳ و... می‌رسیم که هیچ‌کدام قبل از ۲۰۱۳ نیستند. پس رقم صفر جزو رقم‌ها نیست. در نتیجه سال موردنظر قبل از ۲۰۰۰ اســت و رقم ۱ را حتماً جزو رقم‌ها داریم. بنابراین چهار رقم مورد استفاده ۱، ۲، ۳ و ۴ هستند که نزدیک‌تریــن آن‌هــا به ۲۰۱۳ و قبل از آن ســال ۱۴۳۲ است.

۱۰۳. با یک خط، مستطیلی را به دو بخش افراز کرده‌ایم، به‌طوری که a>b و نسبت مساحت دو بخش ۸ به ۳ است. اگر a+b=۱۳۲، مقدار a را بیابید.



با توجه به مفروضات مسئله، نسبت مساحت مثلث به مساحت کل مستطیل برابر است با: $\frac{۳}{۱۱}$. در نتیجه اگر ضلع افقی مستطیل را c در نظر بگیریم، داریم:

$$\frac{۳}{۱۱}=\frac{\frac{۱}{۲}ac}{c(a+b)}$$. چون: a+b=۱۳۲،

پس: a=۷۲ و b=۵۰.

۱۰۴. از دنبالــهٔ اعــداد طبیعــی، مضــارب ۷ را حذف کرده‌ایــم. در دنبالهٔ جدید، جملــه nام را بیابید. بــرای مثال، جملــهٔ هفتم این دنبالــه ۸ و جملهٔ پانزدهم ۱۷ است.

برای به‌دســت آوردن جملهٔ nام کافی اســت تعداد مضارب هفت کوچک‌تر یا مساوی n را به‌دست آوریم که برابر است با: $\left[\frac{n}{۷}\right]$. در نتیجه با حذف این جملات جملهٔ nام بــرابر بــا $n+\left[\frac{n}{۷}\right]$ خواهد بود.

۱۰۵. چنــد مثلث متساوی‌الســاقین وجــود دارد که متســاوی‌الاضلاع نیســت و طول ســاق‌های آن عددی طبیعی، کوچک‌تر یا مســاوی n اســت؟ $(n\in N)$

در این مســئله فــرض طبیعی بــودن همهٔ اضلاع لازم اســت. اگر طول ســاق‌ها برابر k باشد، آن‌گاه برای طــول قاعــده مقادیر ۱ تــا ۲k-۱، به‌جــز k قابل قبول اســت. پس ۲k-۲ مقدار برای طول قاعــده وجود دارد.

در نتیجــه تعــداد کل مثلث‌های مذکور برابر اســت با:

$$\sum_{n=۱}^{n}(۲k-۲)=n(n+۱)-۲n=n(n-۱)\text{.}$$

۱۰۶. ذوزنقــهٔ متساوی‌الســاقین PQRS دارای دو قاعدهٔ PQ=۶ و RS=۱۰ اســت. فاصلهٔ دو قاعده ۱۲ است. شعاع کوچک‌ترین دایره‌ای که ذوزنقه را می‌پوشاند، چه‌قدر است؟

اگر O مرکز دایرهٔ محیطی ذوزنقه باشد، این نقطه از چهار رأس ذوزنقه به یک فاصله است. بنابراین روی عمودمنصف PQ و QR واقع است. اگر فاصلهٔ O از RS برابر x باشد، خواهیم داشت:

$$OR = OQ \Rightarrow x^{۲} + ۵^{۲} = (۱۲ - x)^{۲} + ۳^{۲} \Rightarrow x = \frac{۱۶}{۳}$$

۱۰۷. عدد طبیعی N را k- ویژه می‌نامیم، هرگاه مجموع ارقام N به‌علاوهٔ k برابر حاصل‌ضرب ارقام N، برابر با خود عدد N باشد. برای مثال، ۲۹، ۱- ویژه است، چون ۲۹=۹×۲+۹+۲.

الف) همهٔ اعداد دو رقمی ۱- ویژه را پیدا کنید.

ب) ثابت کنید (به روش جبری) که رقم اول همهٔ جواب‌های (الف) یکسان است.

ج) نشان دهید هیچ عدد دو رقمی وجود ندارد که ۲- ویژه باشد.

د) برای چه مقادیری از k، عدد دو رقمی k- ویژه وجود دارد؟

(الف) و (ب) $۱۰a+b=a+b+ab \Rightarrow ۱۰a=a+ab$
$\Rightarrow ۱۰=۱+b \Rightarrow b=۹$

در نتیجه همهٔ اعداد دو رقمی با رقم یکان ۹، ۱- ویژه هستند.

(ج) $۱۰a + b = a + b + ۲ab \Rightarrow ۱۰a = a + ۲ab$
$\Rightarrow ۱۰ = ۱ + ۲b \Rightarrow b = \frac{۹}{۲}$

پس b عددی غیرصحیح است و بنابراین هیچ دورقمی ۲- ویژه‌ای وجود ندارد.

(د) $۱۰a+b=a+b+kab \Rightarrow ۱۰a=a+kab \Rightarrow kb=۹$
$\Rightarrow k=۱,۳,۹$

برای مثال ۱۳، ۳- ویژه و ۱۱، ۹- ویژه است.

۱۰۸. ثابت کنید سه عدد حقیقی گنگ نمی‌توان یافت که مجموع هر دوتای آن‌ها گویا باشد.

(برهان خلف) فرض کنید a، b و c سه عدد گنگ باشند که مجموع هردوتای آن‌ها گویاست. در نتیجه چون: $a + b + c = \frac{۱}{۲}((a + b) + (b + c) + (c + a))$، مجموع آن‌ها عددی گویاست. و چون: $a=(a+b+c)-(b+c)$، پس a نیز گویاست که تناقض دارد.

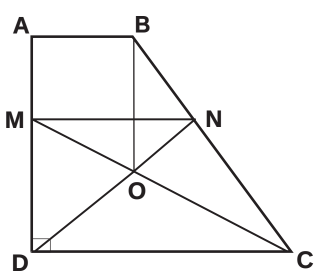
۱۰۹. چهار عدد حقیقی a، b، c و d مفروض‌اند. ثابت کنید حداکثر ۴ زوج مانند {x,y} میان آن‌ها می‌توان یافت، به‌طوری که: $۱<|x-y|<۲$. برای ۴ زوج یک مثال از چهار عدد حقیقی پیدا کنید.

گرافی از مرتبهٔ ۴ تعریف می‌کنیم. اعداد a، b، c و d را همان رئوس در نظر بگیرید. اگر دو رأس متناظر با دو عدد با اختلاف بین ۱ تا ۲ بودند، آن دو رأس را به‌هم وصل می‌کنیم. نشان می‌دهیم این گراف مثلث (۳ رأس دوبه‌دو مجاور) ندارد. سه رأس x، y و z را در نظر بگیرید و فرض کنید $x<y<z$. اگر: $۱<z-y<۲$ و $۱<y-x<۲$ آن‌گاه: $۲<z-x<۴$ که نشان می‌دهد سه رأس دوبه‌دو مجاور وجود ندارند. بنابراین گراف ساخته شده با چهار رأس، هیچ مثلثی ندارد. چنین گرافی حداکثر ۴ یال دارد. (در حالت کلی هر گراف بدون مثلث از مرتبهٔ n، حداکثر $\left[\frac{n^{۲}}{۴}\right]$ یال دارد.)

۱۱۰. (ارائه شده توسط هوشنگ شرقی از اعضای هیئت تحریریه مجله)

در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD، M و N روی AD و BC چنان قرار دارند که MN موازی قاعده‌های ذوزنقه است. اگر O نقطهٔ برخورد DN و CM باشد و BO||AD، ثابت کنید:

$$\frac{AD}{AM} = \left(\frac{CD}{MN}\right)^{۲}$$



نقطهٔ برخورد BO و امتداد آن را با MN و CD به‌ترتیب P و Q بنامید و از O عمود OH را بر AD رسم کنید. با استفاده از قضیهٔ تالس در مثلث‌های DMN و CDM (OH||MN||CD) نشان دهید: $OH = \frac{MN.CD}{MN + CD}$ و در نتیجه $AB = \frac{MN.CD}{MN + CD}$ (۱) از طرف دیگر داریم:

$$\frac{AD}{AM} = \frac{BQ}{BP} = \frac{CQ}{NP} = \frac{CD - AB}{MN - AB}$$

با جایگذاری AB از رابطهٔ (۱) در تساوی بالا، حکم نتیجه می‌شود.